

CHƯƠNG III

HỌC LỰC KHÔNG GIAN

Bài 7. VECTƠ CHÍNH VÀ VECTƠ MÔMEN CHÍNH CỦA HỌC LỰC KHÔNG GIAN

I. Vectơ chính của học lực không gian

Cho học lực không gian $(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n)$

1. Định nghĩa: Vectơ chính của học lực, ký hiệu $\vec{R}'$, là vectơ tổng của các vectơ học lực của học lực:

$$\vec{R}' = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_n = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i \quad (7.1)$$

2. Xác định vectơ chính: Có thể dùng phương pháp vẽ đa giác học lực. Trong trường hợp này đa giác học lực là đa giác kín.

Cũng có thể xác định vectơ chính qua các hình chiếu của nó trên ba trục tọa độ vuông góc theo các công thức sau:

$$\left. \begin{aligned} R'_x &= \vec{F}_{1x} + \vec{F}_{2x} + \dots + \vec{F}_{ix} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_{ix} \\ R'_y &= \vec{F}_{1y} + \vec{F}_{2y} + \dots + \vec{F}_{iy} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_{iy} \\ R'_z &= \vec{F}_{1z} + \vec{F}_{2z} + \dots + \vec{F}_{iz} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_{iz} \end{aligned} \right\} \quad (7.2)$$

$$R' = \sqrt{R'^2_x + R'^2_y + R'^2_z}; \quad \cos \alpha = \frac{R'_x}{R'};$$

$$\cos \beta = \frac{R'_y}{R'}; \quad \cos \gamma = \frac{R'_z}{R'};$$

Trong đó α, β, γ là góc hợp bởi $\vec{R}'$ và các trục Ox, Oy, Oz

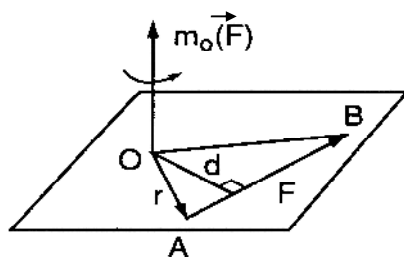
II. Mômen chính của học lực không gian đối với trục định hướng

1. Mômen của mômen lực đối với trục định hướng

Mômen của học lực $\vec{F}$ đối với trục định hướng O , ký hiệu $\vec{m}_O(\vec{F})$ là vectơ có:

- Phương vuông góc với mặt phẳng qua O và chứa $\vec{F}$.
- Chiều: Nhìn từ đầu mút trục định hướng $\vec{F}$ quay ngược chiều kim đồng hồ quanh O .
- Trị số bằng tích số của giá trị học lực với cánh tay đòn của học lực đối với trục định hướng O , $\vec{m}_O(\vec{F}) = Fd$ (hình 7.1)

Đơn vị: Nm



H7 - 1

Dễ dàng thấy rằng vectơ mômen của lực đối với điểm bất biến khi lực trượt trên đường tác dụng của nó và trị tuyệt đối khi lực $\vec{F}$ đi qua điểm lấy mômen ($d = 0$). Trễ lại của mômen bằng 2 lần diện tích tam giác ΔOAB (A là điểm đặt của lực, B là điểm mút của vectơ lực)

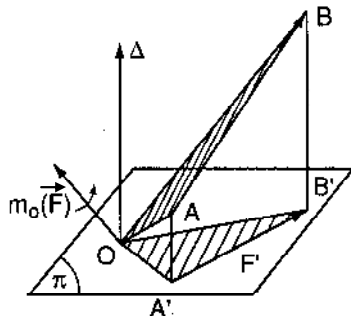
Từ đó suy ra: Vectơ mômen của lực $\vec{F}$ đối với điểm O bằng tích có hướng của vectơ định vị điểm đặt lực $\vec{r} = \vec{OA}$ với vectơ lực $\vec{F}$:

$$\vec{m}_O(\vec{F}) = \vec{r} \wedge \vec{F} \quad (7.3)$$

2. Mômen của lực đối với trục

Mômen của lực $\vec{F}$ đối với trục Δ , ký hiệu $\vec{m}_\Delta(\vec{F})$ là mômen của lực $\vec{F}$ đối với điểm O , đó $\vec{F}'$ là hình chiếu của lực $\vec{F}$ trên mặt phẳng π vuông góc với trục Δ , còn O là giao điểm của trục Δ với mặt phẳng π (hình 7.2):

$$\vec{m}_\Delta(\vec{F}) = \vec{m}_O(\vec{F}') = \vec{F}'d \quad (7.4)$$



H7 - 2

Rõ ràng khi $F = 0$ hoặc khi $\vec{F}$ song song hay cắt trục Δ (lực và trục đồng phẳng) thì $\vec{m}_\Delta(\vec{F}) = 0$.

3. Định lý liên hệ giữa mômen của lực đối với điểm và mômen của lực đối với trục (định lý 7-1)

Định lý 7.1: Mômen của lực $\vec{F}$ đối với trục Δ bằng hình chiếu trên trục Δ của vectơ mômen của lực $\vec{F}$ đối với điểm O nằm trên trục.

$$\vec{m}_\Delta(\vec{F}) = \text{hch}_\Delta[\vec{m}_O(\vec{F})] \quad (7.5)$$

Áp dụng công thức (9.5) cho trục Δ là trục Ox, Oy, Oz mômen của lực $\vec{F}$ đối với ba trục là $\vec{m}_x(\vec{F}), \vec{m}_y(\vec{F}), \vec{m}_z(\vec{F})$, còn hình chiếu mômen của lực $\vec{F}$ đối với điểm O trên ba trục là $\vec{m}_{Ox}(\vec{F}), \vec{m}_{Oy}(\vec{F}), \vec{m}_{Oz}(\vec{F})$ ta có:

$$\vec{m}_O(\vec{F}) \begin{cases} \vec{m}_{Ox}(\vec{F}) = \vec{m}_x(\vec{F}) \\ \vec{m}_{Oy}(\vec{F}) = \vec{m}_y(\vec{F}) \\ \vec{m}_{Oz}(\vec{F}) = \vec{m}_z(\vec{F}) \end{cases} \quad (7.6)$$

Vì vậy có thể thay thế việc tính hình chiếu trên mặt trục của vectơ mômen của lực $\vec{F}$ đối với điểm O bằng tính mômen của lực $\vec{F}$ đối với trục đó.

4. Mômen chính của hệ lực không gian đối với điểm

Véc-tơ mômen chính của hệ lực không gian đối với điểm O , ký hiệu $\vec{m}^O$, là mômen véc-tơ bằng tổng hình học các véc-tơ mômen của các lực đối với điểm O .

$$\vec{m}^O = \vec{m}_O(\vec{F}_1) + \vec{m}_O(\vec{F}_2) + \dots + \vec{m}_O(\vec{F}_n) = \sum_{i=1}^n \vec{m}_O(\vec{F}_i) \quad (7.7)$$

Véc-tơ mômen chính có thể được xác định bằng phương pháp đa giác véc-tơ (tổng hợp đa giác lực, ở đó véc-tơ lực được thay thế bằng các véc-tơ mômen của lực), nhờ nguyên tắc hình bình hành, ta xác định các hình chiếu của nó trên các trục tọa độ theo (9.6)

$$\vec{m}^O = \begin{cases} \overline{m}^{Ox} = \sum_{i=1}^n \overline{m}_{Ox}(\vec{F}_i) = \sum_{i=1}^n \overline{m}_x(\vec{F}_i) \\ \overline{m}^{Oy} = \sum_{i=1}^n \overline{m}_{Oy}(\vec{F}_i) = \sum_{i=1}^n \overline{m}_y(\vec{F}_i) \\ \overline{m}^{Oz} = \sum_{i=1}^n \overline{m}_{Oz}(\vec{F}_i) = \sum_{i=1}^n \overline{m}_z(\vec{F}_i) \end{cases} \quad (7.8)$$

Từ đó dễ dàng xác định giá trị và phương chiếu của véc-tơ mômen chính

5. Nhận xét

- Mômen chính của hệ lực đồng quy đối với điểm đồng quy bằng không.
- Mômen chính của hệ ngẫu nhiên bất kỳ điểm nào cũng bằng véc-tơ ngẫu lực tổng:

$$\vec{m}^O = \sum_{i=1}^n \vec{m}_i \quad (7.9)$$

- Véc-tơ chính là véc-tơ tự do, còn véc-tơ mômen chính thay đổi theo điểm lấy mômen:

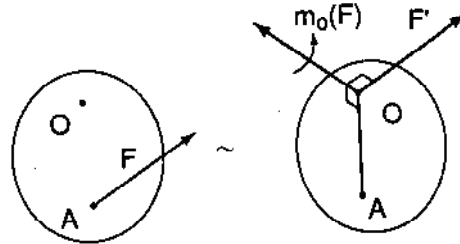
$$\vec{m}^{O_1} = \vec{m}^O + \vec{m}_{O_1}(\vec{R}'_O) \quad (7.10)$$

Bài 8. THU GỌN HỆ LỰC KHÔNG GIAN

I. Định lý về dãi lực song song

Lực $\vec{F}$ đặt tại A tương đương với tác dụng của nó tại O (lực $\vec{F}'$) và mômen tương đương có vectơ mômen bằng vectơ mômen của lực $\vec{F}$ đối với điểm O (hình 8 – 1).

$$\vec{F} \sim [\vec{F}' \text{ và } \vec{m} = \vec{m}_O(\vec{F})] \quad (10.1)$$



H8 – 1

Chứng minh định lý này giống như chứng minh cho trường hợp hai lực phẳng, khi thay thế mômen đối với số bằng vectơ mômen.

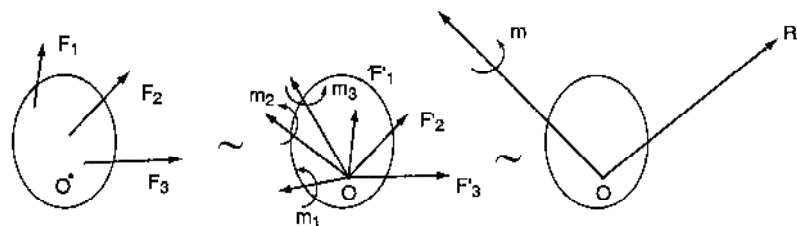
II. Thu gọn hệ lực không gian về tâm

Lấy một điểm O tùy ý, gọi là tâm thu gọn. Sử dụng định lý dãi lực song song đối với các lực về tâm O (10.2)

$$\begin{aligned} \vec{F}_1 &\sim [\vec{F}'_1 \text{ và } \vec{m}_1 = \vec{m}_O(\vec{F}_1)] \\ \vec{F}_2 &\sim [\vec{F}'_2 \text{ và } \vec{m}_2 = \vec{m}_O(\vec{F}_2)] \end{aligned} \quad (8.1)$$

$$\vec{F}_n \sim [\vec{F}'_n \text{ và } \vec{m}_n = \vec{m}_O(\vec{F}_n)]$$

Như vậy thu gọn hệ lực $(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n)$ về tâm O, ta được một hệ lực đồng quy (không gian) tại O: $(\vec{F}'_1, \vec{F}'_2, \dots, \vec{F}'_n)$ và một hệ mômen (không gian): $(\vec{m}_1, \vec{m}_2, \dots, \vec{m}_n)$



H8 – 2

Hệ lực đồng quy có hợp lực qua O, ký hiệu $\vec{R}'_O$ được biểu diễn bằng vectơ chính của hệ đã cho đặt tại O (vectơ chính của hệ lực đồng quy tại O và vectơ chính của hệ đã cho bằng nhau).

$$\vec{R}'_O \equiv \sum_{i=1}^n \vec{F}'_i = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i = \vec{R}' \quad (8.2)$$

trong đó $\vec{R}'$ là vectơ chính của hệ đã cho.

Hệ ng⊃u l⊃c không gian $(\vec{m}_1, \vec{m}_2, \dots, \vec{m}_n)$, t⊃ng đ⊃ng v⊃i m⊃t ng⊃u l⊃c $\vec{m}$:

$$\vec{m} = \vec{m}_1 + \vec{m}_2 + \dots + \vec{m}_n = \vec{m}_o(\vec{F}_1) + \vec{m}_o(\vec{F}_2) + \dots + \vec{m}_o(\vec{F}_n)$$

$$\vec{m} = \sum_{i=1}^n \vec{m}_o(\vec{F}_i) = \vec{m}_o \quad (8.3)$$

Định lý 8 – 1: Hệ l⊃c không gian t⊃ng đ⊃ng v⊃i m⊃t l⊃c và m⊃t ng⊃u l⊃c đ⊃t t⊃i m⊃t đ⊃m tùy ý, chúng đ⊃c g⊃i là l⊃c thu g⊃n và ng⊃u l⊃c thu g⊃n. L⊃c thu g⊃n đ⊃t t⊃i tâm thu g⊃n có véct⊃ l⊃c b⊃ng véct⊃ chính c⊃a h⊃ l⊃c, còn ng⊃u l⊃c thu g⊃n có véct⊃ mômen b⊃ng véct⊃ mômen chính c⊃a h⊃ l⊃c đ⊃i v⊃i tâm thu g⊃n.

Nh⊃n xét:

1. Ph⊃ng chi⊃u và giá tr⊃ c⊃a l⊃c thu g⊃n không ph⊃ thu⊃c vào tâm thu g⊃n. S⊃ bi⊃n đ⊃i c⊃a ng⊃u l⊃c thu g⊃n theo tâm thu g⊃n phù h⊃p v⊃i công th⊃c (9.10)
2. Đ⊃i v⊃i h⊃ l⊃c không gian, l⊃c thu g⊃n không n⊃m trong m⊃t ph⊃ng c⊃a ng⊃u l⊃c thu g⊃n nh⊃ tr⊃ng h⊃p h⊃ l⊃c ph⊃ng (t⊃c véct⊃ chính và véct⊃ mômen chính không vu⊃ng góc v⊃i nhau nh⊃ trong tr⊃ng h⊃p h⊃ l⊃c ph⊃ng). Đây là s⊃ khác bi⊃t c⊃a b⊃n gi⊃a h⊃ l⊃c không gian và h⊃ l⊃c ph⊃ng.

Bài 9. ĐIỀU KIỆN CÂN BẰNG VÀ CÁC PHƯƠNG TRÌNH CÂN BẰNG**1. Điều kiện cân bằng**

Định lý 9 – 1: Điều kiện cần và đủ để hệ lực không gian cân bằng là vectơ chính và vectơ mômen chính của hệ lực đối với mọi điểm bất kỳ triệt tiêu.

$$(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n) \equiv 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{R} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i = 0 \\ \vec{m}_O = \sum_{i=1}^n \vec{m}_O(\vec{F}_i) = 0 \end{cases} \quad (9-1)$$

Chứng minh: Điều kiện cần được chứng minh dựa vào định thu gọn của hệ lực không gian. Theo vế y nên điều kiện (9 - 1) không được thỏa mãn thì hệ lực đã cho thu về một trong các dạng: ngẫu lực, cặp lực hoặc một lực và một ngẫu lực. Dường như rõ ràng không có một dạng nào trong đó thỏa mãn tiên đề 1 về cân bằng.

Điều kiện đủ là hiển nhiên vì từ vectơ chính bằng không, hệ lực thu về một ngẫu lực có mômen bằng mômen chính của hệ lực đối với tâm thu gọn, nó bằng không thì chính là ngẫu lực thu gọn là hai lực cân bằng.

2. Các phương trình cân bằng của hệ lực không gian

Để vectơ chính và vectơ mômen chính triệt tiêu thì các hình chiếu của chúng trên ba trục tọa độ vuông góc phải triệt tiêu:

$$\left. \begin{aligned} \sum_{i=1}^n F_{ix} = 0; \quad \sum_{i=1}^n F_{iy} = 0; \quad \sum_{i=1}^n F_{iz} = 0; \\ \sum_{i=1}^n \bar{m}_x(\vec{F}_i) = 0; \quad \sum_{i=1}^n \bar{m}_y(\vec{F}_i) = 0; \quad \sum_{i=1}^n \bar{m}_z(\vec{F}_i) = 0; \end{aligned} \right\} \quad (9-2)$$

Định lý 9 – 2: Điều kiện cần và đủ để hệ lực không gian cân bằng là tổng hình chiếu của các lực trên ba trục vuông góc và tổng mômen của các lực đối với ba trục phải triệt tiêu.

Các phương trình 9 – 2 được gọi là các phương trình cân bằng của hệ lực không gian.

Từ 9 – 2 có thể suy ra các phương trình cân bằng của các hệ lực đặc biệt: Hệ lực đồng quy không gian; hệ ngẫu lực không gian; hệ lực song song không gian. Đối với các hệ lực này số phương trình cân bằng giảm xuống còn ba phương trình.

Ví dụ: Một trục kéo AB có đầu ng trục nằm ngang và được đỡ trên hai trục (bên trục) A và B. Hai nhánh đai có puli có đường kính $D = 0,6\text{m}$ chịu các lực căng $T_1 = 5\text{kN}$, $T_2 = 2\text{kN}$. Vật được kéo có trọng lượng $P = 5\text{kN}$ và tang treo có đường kính $d = 0,3\text{m}$. Trục treo chịu tác động của ngẫu lực cân có mômen M .

Xác định ngẫu lực cân M cần thiết để trục cân bằng và các phản lực tại các gối trục A và B. Biết qua masát, các kích thước cho trên hình vẽ.

Bài giải

Trọng lực cân bằng động lực tác động của hệ:

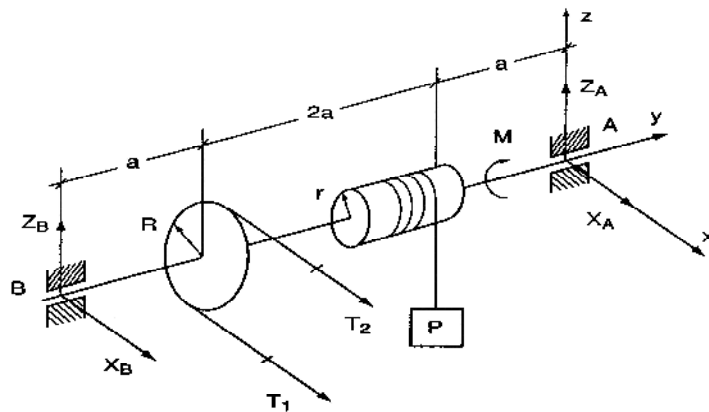
$$(\vec{P}, \vec{M}, \vec{T}_1, \vec{T}_2, \vec{X}_A, \vec{Z}_A, \vec{X}_B, \vec{Z}_B) \approx 0$$

Với trọng tâm đã chọn hình vẽ các phương trình cân bằng của hệ có dạng:

$$\sum \vec{F}_x = T_1 + T_2 + X_A + X_B = 0$$

$$\sum \vec{F}_z = -P + Z_A + Z_B = 0$$

$$\sum \vec{m}_x(\vec{F}) = aP - 4aZ_B = 0$$



$$\sum \vec{m}_y(\vec{F}) = T_1 \frac{D}{2} - T_2 \frac{D}{2} - P \frac{d}{2} - M = 0$$

$$\sum \vec{m}_z(\vec{F}) = 3aT_1 + 3aT_2 + 4aX_B = 0$$

Thay các giá trị bằng hệ số vào hệ phương trình trên và giải ra ta nhận được:

$$X_A = -1,75 \text{ kN}; \quad Z_A = 3,75 \text{ kN}; \quad X_B = -5,25 \text{ kN}$$

$$Z_B = 1,25 \text{ kN}; \quad M = 0,15 \text{ kN}$$

Đây thành phần X_A và X_B có chiều ngược so với chiều trên hình vẽ.

CÂU HỎI ÔN TẬP

- Định nghĩa vectơ chính của hệ học không gian. Công thức xác định 3 hình chiếu của vectơ chính trên ba trục vuông góc.
- Định nghĩa mômen chính đối với một điểm của hệ học không gian. Công thức xác định ba hình chiếu của vectơ mômen chính đối với một điểm của hệ lên trên ba trục vuông góc.
- Nêu các phương trình cân bằng của hệ học không gian.